Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

— Mise en évidence des résultats

— Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle

— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur

— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*Banque PT, Maths C, 2024*)

Préambule

1. Rappeler, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, les deux expressions (l'une faisant intervenir la fonction cosinus, l'autre la fonction tangente) de la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \tan x$$

2. (a) Montrer que la fonction g qui, à tout réel x de $]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, associe $g(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, se prolonge en une fonction $\tilde{g}$ continue sur $]0, \pi[$. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[$.

   (b) En déduire une primitive sur $]0, \pi[$ de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$$

3. On considère les fonctions

$$f_1 : x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

   (a) Expliciter les domaines de définition respectifs $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}$ des fonctions f_1 et f_2.

   (b) Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont périodiques, de périodes respectives T_1 et T_2 que l'on explicitera.

   (c) Donner les domaines de dérivabilité respectifs des fonctions f_1 et f_2.

   (d) Donner, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_1, l'expression de $f_1'(x)$.

(e) Montrer que, en tout réel x du domaine de dérivabilité de la fonction f_2,

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et en déduire une expression simplifiée de $f_2'(x)$.

(f) Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2. On donnera leurs tableaux de variations respectifs sur une période, en précisant les limites aux bords.

Donner, également, les valeurs des fonctions f_1 et f_2 en $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

(g) Tracer, sur un même graphe (échelle : 1 cm pour une unité), la courbe représentative de f_1 sur $\mathcal{D}_1 \cap [-2\pi, 2\pi]$ et la courbe représentative de f_2 sur $\mathcal{D}_2 \cap [-2\pi, 2\pi]$.

4. On considère la fonction

$$f_3 : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(a) Expliciter le domaine de définition $\mathcal{D}_3 \subset \mathbb{R}$ de la fonction f_3. Quel est le domaine de dérivabilité de f_3 ?

(b) Étudier les variations de la fonction f_3 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On donnera son tableau de variations, en précisant les limites aux bords.

Partie I

On considère l'équation différentielle sur $]0, \pi[$:

$$y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (\mathcal{E})$$

1. On introduit la fonction f_4 qui, à tout réel x de $]0, \pi[$, associe :

$$f_4(x) = (\sin(x)) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Montrer que, pour tout réel x de $]0, \pi[$:

$$f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

2. Résoudre l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
3. Montrer que les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ sont de la forme :

$$y = y_0 + f_4$$

où y_0 est une solution de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.

4. Dans cette question, on souhaite retrouver de façon différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ de la forme :

$$x \mapsto y(x) = z(x)\sin(x)$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0, \pi[$.

(a) Montrer que si y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$, alors z' est solution sur $]0, \pi[$ d'une équation différentielle du premier ordre, notée $(\mathcal{E}')$.

(b) Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$, puis appliquer la méthode de variation de la constante pour déterminer les solutions de $(\mathcal{E}')$. Donner alors, pour tout réel x de $]0, \pi[$, l'expression de $z'(x)$ en fonction de x.

(c) A l'aide du Préambule, exprimer, pour tout réel x de $]0, \pi[$, $z(x)$ en fonction de x.

(d) Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ obtenues plus haut.

Exercice 2
(*EDHEC ECE 2019*)

On considère dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, dont on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Partie I

1. (a) Calculer A^2 puis vérifier que A^3 est la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau de f.
2. Soit $e_1' = (-1, -1, 1)$, $e_2' = (2, -1, 1)$ et $e_3' = (-1, 2, 1)$.
   (a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E.
   (b) Démontrer que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. On pose : $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   On note h l'endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.
   (a) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha A + \beta I$, où I est la matrice identité de taille 3.
   (b) Déterminer la matrice M' de h dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) En déduire que M est inversible.
   (d) À l'aide de la question 1.(a), calculer $(M - I)^3$. En déduire l'expression de M^{-1} en fonction des matrices I, M et M^2.
   (e) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer M^n pour tout entier naturel n, en fonction des matrices I, A et A^2.
   Cette formule est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Partie II

Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe aucun endomorphisme g de E vérifiant $g \circ g = f$.
On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que :

$$V^2 = T$$

On note g l'endomorphisme dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}'$ est V.

1. Montrer que $V\ T = T\ V$. En déduire que $g \circ f = f \circ g$.
2. (a) Montrer que $g(e_1')$ appartient au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel a tel que $g(e_1') = a\ e_1'$.
   (b) Montrer que $g(e_2') - a\ e_2'$ appartient aussi au noyau de f.
   En déduire qu'il existe un réel b tel que $g(e_2') = b\ e_1' + a\ e_2'$.
   (c) Montrer que : $f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = a\ e_2' + b\ e_1'$.
   En déduire que $g(e_3') - a\ e_3' - b\ e_2'$ appartient au noyau de f.
   (d) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
3. Calculer V^2 en fonction de a, b et c, puis en utilisant l'hypothèse $V^2 = T$, obtenir une contradiction.

Exercice 3

(Banque PT, Maths A, 2024)

— On dispose d'un paquet de bonbons qui contient uniquement des bonbons à la menthe et des nougats.
— On suppose que l'emballage des bonbons les rend indiscernables.
— Alice n'aime que les bonbons à la menthe et Cyril que les nougats.

Par ailleurs, on pourra utiliser les notations suivantes : pour tout entier $n \geqslant 1$,

— M_n est l'événement « le n-ième bonbon tiré est un bonbon à la menthe » ;
— N_n est l'événement « le n-ième bonbon tiré est un nougat ».

On suppose que le paquet de bonbons contient 10 nougats et 10 bonbons à la menthe. Alice tire 1 bonbon dans le paquet et le garde dans sa main puis Cyril fait de même.

On note :

— X_A la variable aléatoire égale à 1 si Alice tire un bonbon à la menthe et égale à 0 si Alice tire un nougat.
— X_C la variable aléatoire égale à 1 si Cyril tire un nougat et égale à 0 si Cyril tire un bonbon à la menthe.

1. (a) Quelle est la loi de X_A ? On donnera son nom et la valeur du ou des paramètres.
   (b) Donner les valeurs de l'espérance et la variance de X_A.
2. (a) Déterminer $\mathbb{P}(X_A = 0, X_C = 0)$.
   (b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_A, X_C).
3. En déduire la loi de X_C *une justification est attendue.*
4. (a) Vérifier que la covariance $\text{Cov}(X_A, X_C)$ de X_A et X_C vaut $\dfrac{1}{76}$.
   (b) Les variables aléatoires X_A et X_C sont-elles indépendantes ?

   Lorsqu'un enfant a tiré un bonbon qu'il n'aime pas, il le donne à l'autre enfant.

   On note alors :

   — Y_A la variable aléatoire égale au nombre de bonbons à la menthe détenus par Alice après les dons éventuels ;
   — Y_C la variable aléatoire égale au nombre de nougats détenus par Cyril après les dons éventuels.
5. Justifier que l'univers image $Y_A(\Omega)$ de Y_A est égal à $\{0, 1, 2\}$.
6. (a) Quelle est la loi de $Y = Y_A + Y_C$?
   (b) En déduire que la covariance $\text{Cov}(Y, Y_A)$ de Y et Y_A est nulle.
   (c) Démontrer que $\text{Cov}(Y, Y_A) = \mathbb{V}(Y_A) + \text{Cov}(Y_A, Y_C)$ où $\text{Cov}(Y_A, Y_C)$ est la covariance de Y_A et Y_C et $\mathbb{V}(Y_A)$ la variance de Y_A.
   (d) En déduire le signe de $\text{Cov}(Y_A, Y_C)$.
7. Justifier que $Y_A = 1 + X_A - X_C$.
8. En déduire l'espérance de Y_A et démontrer que sa variance vaut $\dfrac{9}{19}$.
9. À l'aide des résultats de la question précédente, justifier que la loi de Y_A n'est pas une loi binomiale.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Préambule

1. La fonction tangente est dérivable sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et, pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}.$$

2. (a) La fonction tangente ne s'annule pas sur $]0, \pi[\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ donc g est continue sur $]0, \pi[\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ comme inverse de fonction continue ne s'annulant pas. De plus

$$\tan(x) \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}{\longrightarrow} -\infty$$

donc, par inverse, g tend vers 0 en $\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ se prolonge sur }]0, \pi[\text{ en une fonction continue continue } \widetilde{g} \text{ par } \widetilde{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.}$

La fonction $\widetilde{g}$ est dérivable sur $]0, \pi[\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ comme inverse de fonction dérivable ne s'annulant pas et, pour tout $x \in]0, \pi[\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$:

$$\widetilde{g}'(x) = g'(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)}.$$

Comme inverse, $\widetilde{g}'$ tend vers -1 en $\dfrac{\pi}{2}$ donc, par le théorème de limite de la dérivée, $\widetilde{g}'$ est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\widetilde{g}'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. $\boxed{\text{Finalement, la fonction } \widetilde{g} \text{ est dérivable sur }]0, \pi[\text{ et sa dérivée est } -1/\sin^2.}$

(b) Par la question précédente, $\widetilde{g}'$ étant dérivable sur $]0, \pi[$, de dérivée $-1/\sin^2$ (qui est continue sur cet intervalle), $\boxed{\text{une primitive de } 1/\sin^2 \text{ est } -\widetilde{g}' \text{ sur }]0, \pi[}$.

3. (a) La fonction f_1 est définie en un réel x si et seulement si $\dfrac{x}{2} \not\equiv \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$ ce qui est équivalent au fait que $x \not\equiv \pi$ $[2\pi]$, ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}}.$$

La fonction f_2 est définie en un réel x si et seulement si $f_1(x) > 0$ ce qui donne :

$$\boxed{\mathcal{D}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[}.$$

(b) Pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_1$, $x - 2\pi \in \mathcal{D}_1$ et

$$f(x + 2\pi) = \tan\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = f_1(x)$$

par π-périodicité de la fonction tangente. On peut procéder de même pour f_2.

$\boxed{\text{Finalement, } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques.}}$

(c) Par composition, f_1 est dérivable sur son domaine de définition. De même, f_2 est dérivable sur son domaine de définition puisque la fonction logarithme l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{En conclusion, les fonctions } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs.}}$

(d) Pour tout $x \in \mathcal{D}_1$,

$$\boxed{f_1'(x) = \frac{1}{2}\tan'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

(e) Pour tout $x \in \mathcal{D}_1$,

$$\boxed{f_2'(x) = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

Finalement, $\boxed{\text{sur } \mathcal{D}_2,\ f_2' = \frac{1}{\sin}}$.

(f) Sur $]-\pi, \pi[$, f_1 est strictement positive et les limites de f_1 sont données directement par les limites de la fonction tangente ce qui donne le tableau :

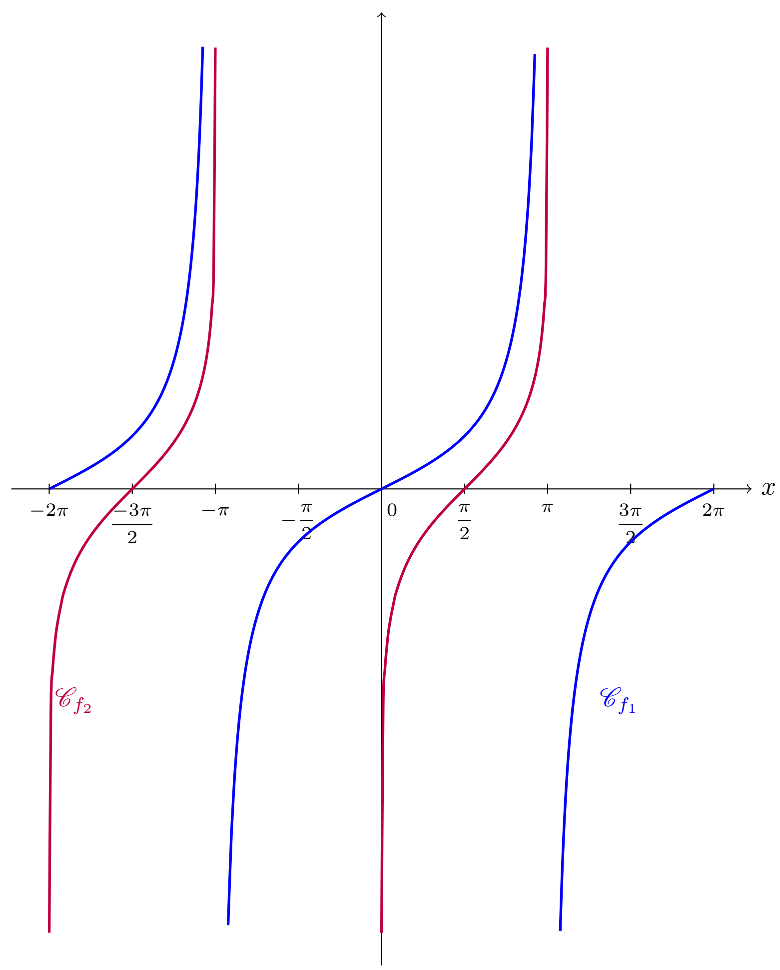
x	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		π
f_1'	$\Vert$		$+$		$\Vert$
f_1	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

Avec le domaine de f_2 et les limites de la fonction logarithme, on obtient le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
f_2'	$\Vert$		$+$				
f_2	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$		

(g) On a les graphes suivants :

Figure .1 – title=Tracé des courbes de f_1 et f_2



4. (a) La fonction f_3 est définie en un réel x si et seulement si $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ ce qui donne

$$\boxed{\mathcal{D}_3 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

En tant qu'inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}_3$, $\boxed{f_3 \text{ est dérivable sur } \mathcal{D}_3}$.

(b) Pour tout $x \in [0, \pi/4]$, $f_3'(x) = \dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} \geqslant 0$ et cette quantité est nulle uniquement pour $x = 0$. Ceci donne le tableau :

x	0		$\pi/4$
f_3'	0	$+$	
f_3	1	$\nearrow$	2

Partie I

1. La fonction f_4 est le produit de sin par f_2 donc elle est dérivable sur $]0, \pi[$ et, pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$f_4'(x) = \sin'(x) f_2(x) + \sin(x) f_2'(x) = \cos(x) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\sin(x)}{\sin(x)} = \cos(x) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 1.$$

À nouveau par produit, f_4' est dérivable sur $]0, \pi[$ et, pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$f_4''(x) = -\sin(x) \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

ce qui s'écrit :

$$\boxed{f_4''(x) = -f_4(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.}$$

2. L'équation $y'' + y = 0$ est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants homogène. Les racines de l'équation caractéristique sont i et $-$i.

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de cette équation est } \mathrm{Vect}(\sin, \cos)}$.

3. La fonction y est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $y'' + y = f_4'' + f_4$ ce qui s'écrit

$$(y - f_4)'' + (y - f_4) = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe une solution y_0 de l'équation homogène associée tel que $y - f_4 = y_0$ ce qui s'écrit

$$\boxed{y = y_0 + f_4}.$$

4. (a) Supposons que y est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$. On a, pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$\begin{cases} y'(x) = z'(x)\sin(x) + z(x)\cos(x) \\ y''(x) = z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x) \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, \pi[$:

$$z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x) + z(x)\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

ce qui s'écrit, en prenant $\psi = z'$:

$$\psi'(x)\sin(x) + 2\psi(x)\cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

puis, comme sin ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, on en déduit que z' est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\boxed{\psi' + 2\frac{\cos}{\sin}\psi = \frac{\cos}{\sin^2} \qquad (\mathcal{E}')}.$$

(b) Une primitive de $2\dfrac{\cos}{\sin}$ sur $]0,\pi[$ est $x \mapsto 2\ln|\sin(x)|$ donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}')$ sont de la forme $x \mapsto C\exp(-2\ln|\sin(x)|)$ ce qui s'écrit :

$$x \mapsto \frac{C}{\sin(x)^2}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme : $\psi : x \mapsto \dfrac{C(x)}{\sin(x)^2}$ où C est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi[$. La fonction ψ est solution de $(\mathcal{E}')$ sur $]0,\pi[$ si et seulement si

$$\forall x \in]0,\pi[, \quad \frac{C'(x)}{\sin(x)^2} - 2\frac{C'(x)\cos(x)}{\sin(x)^3} + 2\frac{C'(x)\cos(x)}{\sin(x)^3} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

ce qui donne $C' = \cos$. Ainsi, on peut choisir $\psi = \dfrac{\sin}{\sin^2}$ c'est-à-dire

$$\psi : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}.$$

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}')$ sur $]0,\pi[$ est donc l'ensemble des fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin(x)}, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

qui est l'expression de z'.

(c) Avec les primitives trouvées dans le Préambule à la question 3e, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, une primitive de

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin(x)}$$

sur $]0,\pi[$ est $x \mapsto \lambda\widetilde{g}(x) + \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$. Ainsi, z est de la forme :

$$\boxed{z : x \mapsto \mu + \lambda\widetilde{g}(x) + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2}.$$

(d) Finalement, si y est solution de $(\mathcal{E})$, en multipliant l'expression de z précédente par sin, on trouve que y est de la forme :

$$z : x \mapsto \mu\sin(x) + \lambda\cos(x) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$$

avec l'expression de $\widetilde{g}$ qui est le prolongement de g en $\dfrac{\pi}{2}$. Réciproquement, les fonctions de cette forme sont bien des solutions de $(\mathcal{E})$. $\boxed{\text{On retrouve les résultats de la question 3.}}$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) Le calcul donne

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3}$$

comme demandé.

(b) On résout

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A) &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y + z &=& 0 \\ x + y + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -z \end{array} \right. \\ &\iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1,-1,1))}$ Comme $(-1,-1,1)$ est non nul et qu'il engendre le noyau de f, il en forme également une base. $\boxed{\text{Le noyau de } f \text{ est donc de dimension 1.}}$

2. Soient $e'_1 = (-1,-1,1), e'_2 = (2,-1,1)$ et $e'_3 = (-1,2,1)$.
   (a) La famille $\mathcal{B}'$ étant composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle en forme une base.

   Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$. On a alors

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha - \beta + 2\gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -3\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\gamma &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

   La famille $\mathcal{B}'$ est bien libre. C'est une famille libre de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\boxed{\text{c'est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$

   (b) Le premier vecteur de cette famille est celui trouvé précédemment dans le noyau, son image est donc nulle par f. De plus

$$\begin{aligned} f(e'_2) &= f(3e_1 + e'_1) \\ &= 3f(e_1) + f(e'_1) = 3f(e_1) \\ &= (-1,-1,1) \\ &= e'_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e'_3) &= f(e'_1 + 3e_2) \\ &= f(e'_1) + 3f(e_2) \\ &= 3f(e_2) \\ &= (2,-1,1) \\ &= e'_2 \end{aligned}$$

   ce qui permet d'écrire

$$\boxed{T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. (a) On observe que

$$\boxed{M = -A + I, \quad \text{ou encore} \quad \alpha = -1,\ \beta = 1}$$

   (b) On note Id l'endomorphisme identité, la relation matricielle précédente implique que $h = -f + \mathrm{Id}$ ainsi

$$\begin{aligned} M' &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(-f + \mathrm{Id}) \\ &= -\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}) \\ &= -T + I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(h) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) La matrice M' est carrée de taille 3 et de rang 3, elle est donc inversible. Comme M et M' représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables et ont donc notamment le même rang. Ainsi, $\boxed{M \text{ est inversible.}}$

(d) On observe que $M - I = -A$. Ainsi, $\boxed{(M-I)^3 = (-A)^3 = 0_3}$. Comme M et I commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$0 = (M-I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I$$

D'où

$$M^3 - 3M^2 + 3M = M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I.$$

On en déduit donc, par unicité de l'inverse de M, que

$$\boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I}$$

(e) Comme $M = -A + I$ et que $-A$ commute avec I, la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned}
M^n &= (-A+I)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-A)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-A)^k \qquad \qquad (\text{car } A^k = 0,\ k \geqslant 3) \\
&= \binom{n}{0}(-A)^0 + \binom{n}{1}(-A)^1 + \binom{n}{2}(-A)^2 \\
&= I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad M^n = I - nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2}$$

Pour $n = -1$, la formule donnerait, notant que $A = I - M$

$$M^{-1} = I + A + A^2 = I + I - M + I - 2M + M^2 = 3I - 3M + M^2,$$

ce qui est bien la relation trouvée en (d). $\boxed{\text{Cette formule est donc également vraie pour } n = -1.}$

Partie II

On suppose donc par l'absurde qu'il existe une matrice V carrée d'ordre 3 telle que

$$V^2 = T.$$

1. Par hypothèse, on a

$$\boxed{VT = V \cdot V^2 = V^3 = V^2 \cdot V = TV}$$

et les deux matrices commutent. Comme V et T représentent respectivement g et f dans la même base $\mathcal{B}'$, il suit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g \circ f) = VT = TV = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f \circ g).$$

Si deux endomorphismes ont la même matrice dans une même base, ils sont égaux. Ainsi, $\boxed{f \circ g = g \circ f}$.

2. (a) Comme les deux endomorphismes commutent et que $f(e'_1) = 0$, on a

$$f(g(e'_1)) = g(f(e'_1)) = g(0) = 0$$

et $\boxed{g(e'_1) \text{ est ainsi bien un élément du noyau de } f}$. Or $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e'_1)$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe un réel } a \text{ tel que } g(e'_1) = a e'_1.}$

(b) De même
$$f(g(e_2') - ae_2') = f(g(e_2')) - af(e_2') = g(f(e_2')) - af(e_2') = g(e_1') - ae_1' = 0.$$
Ainsi, $\boxed{g(e_2') - ae_2' \in Ker(f) = \text{Vect}(e_1')}$.
Il existe donc $b \in \mathbb{R}$ tel que $g(e_2') - ae_2' = be_1'$ ou encore
$$\boxed{g(e_2') = be_1' + ae_2'}$$

(c) On sait que g et f commutent ainsi
$$\boxed{f \circ g(e_3') = g \circ f(e_3') = g(e_2') = ae_2' + be_1'}$$
Ainsi,
$$f\left(g(e_3') - ae_3' - be_2'\right) = f \circ g(e_3') - af(e_3') - bf(e_2') = ae_2' + be_1' - ae_2' - be_1' = 0$$
et $\boxed{g(e_3') - ae_3' - be_2' \text{ est bien un vecteur du noyau de } f}$.

(d) Toujours comme $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1')$, il existe un réel c tel que
$$g(e_3') - ae_3' - be_2' = ce_1' \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad g(e_3') = ae_3' + be_2' + ce_1'$$
ce qui permet enfin d'écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ (qui est, par définition, V) comme
$$\boxed{V = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}$$

(e) Le calcul donne
$$\boxed{V^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 + 2ac \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}}$$
Mais, comme $V^2 = T$, alors en particulier $\boxed{a = 0 \text{ et } 2ab = 1 \text{ ce qui est impossible}}$.
L'hypothèse de l'existence de V telle que $V^2 = T$ est donc absurde.

Corrigé de l'exercice 3

1. (a) $\boxed{X_A \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p = \frac{1}{2}.}$

   (b) On a
$$\boxed{\mathbb{E}(X_A) = p = \frac{1}{2}, \qquad \text{et } \mathbb{V}(X_A) = p(1-p) = 1\frac{1}{4}}$$

2. (a) On a $\boxed{\mathbb{P}\left(X_A = 0, X_C = 0\right) = \mathbb{P}(X_A = 0)\mathbb{P}(X_C = 0 \,|\, X_A = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{19} = \frac{5}{19}}$ puisque, si Alice prend un nougat, il reste 19 bonbons dans le paquet dont 10 à la menthe donne $X_C = 0$.

   (b) En raisonnant comme précédemment la loi jointe est donnée par le tableau suivant

X_A \ X_C	0	1
0	$\frac{10}{38}$	$\frac{9}{38}$
1	$\frac{9}{38}$	$\frac{10}{38}$

   (c) En utilisant la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $[X_A = 0], [X_A = 1]$ on obtient
$$\mathbb{P}(X_C = 1) = \mathbb{P}(X_C = 1, X_A = 1) + \mathbb{P}(X_C = 1, X_A = 0) = \frac{10}{38} + \frac{9}{38} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_C=0)=\mathbb{P}(X_C=0,X_A=1)+\mathbb{P}(X_C=0,X_A=0)=\frac{9}{38}+\frac{10}{38}=\frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{X_C \text{ suit, comme } X_A\text{, une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}}$

3. (a) On en déduit que $X_A\times X_C$ suit aussi une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_C=1,X_A=1)=\dfrac{5}{19}$ et donc

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X_A,X_C)=\mathbb{E}(X_AX_C)-\mathbb{E}(X_A)\mathbb{E}(X_C)=\frac{5}{19}-\frac{1}{4}=\frac{1}{76}}$$

   (b) Cette covariance étant non nulle, $\boxed{\text{les variables ne sont pas indépendantes.}}$

4. L'univers image représente les valeurs possibles de Y_A donc celles du nombre de bonbons à la menthe d'Alice et suite à l'échange elle aura en effet 0, 1 ou 2 bonbons à la menthe donc $\boxed{Y_A(\Omega)=\{0;1;2\}}$

5. (a) $Y=Y_A+Y_C$ est le nombre de bonbons tirés après deux tirages, c'est donc une constante et ainsi $\boxed{Y=2}$

   (b) Comme Y est constante, elle est indépendante de toutes les variables aléatoires et donc de Y_A. Ainsi $\boxed{\operatorname{Cov}(Y,Y_A)=0\ .}$

   (c) Comme la covariance est bilinéaire, on a, en développant $Y=Y_A+Y_C$:

$$\boxed{0=\operatorname{Cov}(Y,Y_A)=\operatorname{Cov}(Y_A,Y_A)+\operatorname{Cov}(Y_C,Y_A)=\mathbb{V}(Y_A)+\operatorname{Cov}(Y_C,Y_A)}$$

   (d) On a $\mathbb{V}(Y_A)\geqslant 0$ car une variance est toujours positive donc $\operatorname{Cov}(Y_A,Y_C)=-\mathbb{V}(Y_A)\leqslant 0$.

6. On remarque que, si $X_C(\omega)=1$, alors Cyril ne donnera pas de bonbon donc dans ce cas $Y_A(\omega)=X_A(\omega)$

   Sinon $X_C(\omega)=0$ et alors Cyril donne son bonbon à la menthe à Alice qui en aura un de plus donc dans ce cas $Y_A(\omega)=X_A(\omega)+1$

   $\boxed{\text{On a ainsi bien } Y_A=1+X_A-X_C}$

7. Comme X_A et X_C ont la même espérance et par linéarité de l'espérance, on aura $\boxed{\mathbb{E}(Y_A)=1}$

   Puis

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y_A)&=\mathbb{V}(1+X_A-X_C)\\&=\mathbb{V}(X_A-X_C)\\&=\mathbb{V}(X_A)-2\operatorname{Cov}(X_A,X_C)+\mathbb{V}(X_C)\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{38}+\frac{1}{4}\\&=\frac{9}{19}\end{aligned}$$

   Et donc $\boxed{\mathbb{V}(Y_A)=\frac{9}{19}}$

8. Si Y_A suivait une loi binomiale alors, sachant que $Y(\Omega)=[\![0,2]\!]$, elle serait binomiale de paramètre $(n=2,p)$ et alors on aurait $\mathbb{E}(Y_A)=np=2p=1$ donc $p=\dfrac{1}{2}$

   On aurait aussi $\mathbb{V}(Y_A)=np(1-p)=2p(1-p)=\dfrac{1}{2}$, or $\mathbb{V}(Y_A)=\dfrac{9}{19}\neq\dfrac{1}{2}$.

   Ainsi $\boxed{Y_A \text{ ne suit pas une loi binomiale.}}$